ЛЕКЦІЯ № 11

Рівняння Гамільтона-Якобі.

> «Теорема Якобі зводить рішення системи звичайних диференціальних рівнянь до пошуку повного інтеграла рівняння у часткових похідних. Може здатися дивним, що таке зведення простішого до складнішого доставляє ефективний метод вирішення конкретних завдань. Тим часом виявляється, що це найсильніший з існуючих методів точного інтегрування, і багато завдань, вирішених Якобі, взагалі не піддаються вирішенню іншими методами».
>
> В.І.Арнольд

Краще не скажеш.

Рівняння Гамільтона – Якобі – це рівняння для дії $S(q,t)$ як функції координат і часу:

$$\frac{\partial S(q_1,q_2,...,q_s,t)}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,...,q_s,t,\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},...,\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)=0. \qquad (11.1)$$

Це – нелінійне рівняння у часткових похідних першого порядку, що містить лише часткові похідні першого порядку, але не саму функцію.

З початку розглянемо конкретний

Приклад

Наведемо простий приклад рівняння Гамільтона-Якобі для одновимірного руху матеріальної точки в квадратичному потенціалі (лінійний осцилятор) $U(x)=kx^2/2$. В цьому випадку гамільтоніан частинки має дуже простий вигляд:

$$H=p^2/2m+kx^2/2,$$

і розв'язання завдання у лагранжевому підході є очевидним: $x = a\sin\left(\omega_0\left(t-t_0\right)\right)$, де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $a = \sqrt{2E/k}$ і E – повна енергія.

У підході Гамільтона-Якобі відповідне рівняння для дії має вигляд:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} = 0.$$

У цьому прикладі видно складність такого підходу. По-перше, треба вирішити це рівняння у часткових похідних і знайти $S = S\left(x,t\right)$, а по-друге, за знайденою функцією $S\left(x,t\right)$ треба знайти потрібну залежність $x = x\left(t\right)$. Оскільки система консервативна, то випливає, що $\partial S/\partial t = -E = const$, і тому рішення можна подати у вигляді $S = -Et + S_0\left(x\right)$, де функція $S_0\left(x\right)$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$\frac{dS_0}{dx} = \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}},$$

і, отже,

$$S_0 = \sqrt{2m}\int\sqrt{E - kx^2/2}\,dx = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}x\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}} + \sqrt{\frac{m}{k}}E\arcsin\frac{x\sqrt{k}}{\sqrt{2E}}.$$

Остаточний вираз для дії має вигляд:

$$S\left(x,t\right) = \frac{\sqrt{U\left(x\right)\left(E-U\right)}}{\omega_0} + \frac{E}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U}{E}} - Et.$$

Питання: як із цього виразу отримати відому нам тривіальну відповідь $x = \sqrt{2E/k}\sin\left(\omega_0\left(t-t_0\right)\right)$? Виявляється, треба продиференціювати цей вираз за параметром E і прирівняти результат довільній константі t_0. Справді, після диференціювання ми отримаємо $\left(1/\omega_0\right)\arcsin\left(x/a\right) - t = t_0$. Видно, що проблема простіше вирішується у лагранжевому чи гамільтоновому підходах, але іноді лише підхід Гамільтона-Якобі дозволяє вирішити завдання. Чому ми повинні були зробити ці операції? Давайте розберемось детальніше.

Саме виведення рівняння Гамільтона-Якобі припускало, що воно відповідає гамільтоновій системі, для якої справедлива система $2s$ канонічних *звичайних диференціальних* рівнянь:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \qquad (11.2)$$

Рішення цієї системи містить $2s$ довільних констант і тому має $2s$ інтеграли руху, які, взагалі кажучи, невідомі. Якобі сформулював таку теорему:

Теорема Якобі :

Якщо відомо рішення рівняння (11.1), що містить s незалежних довільних постійних α_i (так званий *повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі)* :

$$S = f\left(q_1, q_2, ..., q_s, t; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\right), \qquad (11.3)$$

то вихідні канонічні рівняння (11,2) вирішуються у квадратурах. Вони зводяться до системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial f\left(q, t, \alpha_i\right)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial f\left(q, t, \alpha_i\right)}{\partial q_i} = p_i, \qquad (11.4)$$

де β_i– s довільних констант. З першої групи рівнянь знаходимо залежності $q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i)$, та з другої – залежності $p_i = p_i\left(t, \alpha_i, \beta_i\right)$. Тобто отриманий розв'язок вихідної гамільтонової системи рівнянь залежить від $2s$ довільних констант α_i і β_i. При цьому друга група рівнянь, розв'язана щодо констант $\alpha_i = \alpha_i\left(q, p, t\right)$, задає s інтегралів руху.

Доведемо теорему Якобі . Для цього зробимо канонічне перетворення від гамільтонових змінних $\left(p, q\right)$ («старих») до «нових» змінних за допомогою твірної функції $\Phi\left(q, P, t\right)$(див. лекцію №10), що залежить від старих координат і нових імпульсів. При цьому як твірну функцію виберемо повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі (11.3) $f\left(q_i, \alpha_i, t\right)$, вважаючи константи α_i новими імпульсами. Позначимо нові координати через β_i. Тоді зв'язок нових та старих координат та імпульсів визначається співвідношеннями, що мають у нашому випадку вигляд

$$p_i = \frac{\partial f\left(q, \alpha, t\right)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f\left(q, \alpha, t\right)}{\partial \alpha_i}, \quad H'\left(\alpha_i, \beta_i, t\right) = H\left(p, q, t\right) + \frac{\partial f\left(q, \alpha, t\right)}{\partial t}. \qquad (11.5)$$

Але, оскільки функція f є дія, яка задовольняє рівнянню Гамільтона-Якобі $H + \partial f / \partial t = H + \partial S / \partial t = 0$, то

$$H'(\alpha, \beta, t) = 0. \tag{11.6}$$

Тому рівняння Гамільтона для нових «координат» β_i та «імпульсів» α_i зводяться просто до рівнянь $\dot{\beta}_i = \partial H' / \partial \alpha_i = 0$ та $\dot{\alpha}_i = -\partial H' / \partial \beta_i = 0$. Звідси

$$\alpha_i = const\,,\ \beta_i = const\,. \tag{11.7 }$$

Перший результат природний. Ми виходили з того, що α_i є константами повного інтеграла рівняння Гамільтона-Якобі. Друге співвідношення – нове. Оскільки β_i – константи, то вираз (11.5)

$$\frac{\partial f(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{11.8}$$

стає системою алгебраїчних *рівнянь* для знаходження залежностей $q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$.

Повернемося, наприклад, на початок лекції, де для гармонійного осцилятора було отримано вираз для дії:

$$S(x,t) = \frac{\sqrt{U(x)(E-U)}}{\omega_0} + \frac{E}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U}{E}} - Et \tag{11.9}$$

з $U = kx^2/2$. Це вираз і відповідає повному інтегралу для $f(q, \alpha, t)$, що обговорювалося вище. Роль константи α грає енергія E. Диференціювання S за цією константою (див. (11.8)) дає розв'язок задачі.

Таким чином, знання повного інтегралу рівняння Гамільтона-Якобі дозволяє легко вирішити вихідну динамічну задачу. Але як знайти цей повний інтеграл? На жаль, загального правила цього немає. Про це відверто писав Якобі: «Головна складність при інтегруванні цих диференціальних рівнянь полягає у введенні зручних змінних, для розшуку яких немає жодних правил. Тому ми повинні йти зворотним шляхом і, знайшовши якусь чудову підстановку, розшукувати завдання, в яких вона може бути успішно застосована» (Карл Густав Яків Якобі, Лекції з динаміки).

Сенс цього висловлювання полягає у наступному. Не маючи можливості в загальному випадку знайти повний інтеграл, ми можемо перебирати різні системи координат і намагатися знайти ті рівняння, які можна вирішити. Потім у класі цих рівнянь треба шукати ті, які становлять інтерес для фізики. Наприклад, як ми покажемо нижче, у сферичних координатах (r,ϑ,ϕ) можна вирішити рівняння Гамільтона-Якобі для руху частки в полі достатньо загального вигляду

$$U=a(r)+\frac{b(\vartheta)}{r^2}+\frac{c(\phi)}{r^2\sin^2\vartheta}, \tag{11.10}$$

де $a(r)$, $b(\vartheta)$і $c(\phi)$– довільні функції своїх аогументів . Випадок $b=c=0$ буде розглянуто нами пізніше у розділі «Рух у центральному полі». Він легко досліджується у лагранжевому підході. Але клас потенціалів (11.10) ширший. Наприклад, він містить потенціал взаємодії заряду з дипольним електричним моментом $U=de^2cos\vartheta/r^2$. Тому ця поблема вирішується методом Гамільтона-Якобі. Але, з іншого боку, наприклад, задача про рух двох взаємодіючих диполів вже «не вкладається» у зазначений перелік задач, що вирішуються цим методом.

Розглянемо один із способів знаходження повного інтеграла рівняння Гамільтона-Якобі - так званий *метод поділу змінних*. З ним ми вже стикалися в задачі про гармонійний осцилятор.

Якщо в рівнянні Гамільтона-Якоби (11.1) час явно не входить у гамільтоніан, тобто. воно має вигляд

$$\frac{\partial S(q_1,q_2,...,q_s,t)}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,...,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},...,\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)=0, \tag{24.11}$$

то одна з змінних - час - виділилася в рівнянні, і містилася тільки в першому доданку (гамільтоніан від часу не залежить, але дія - залежить). Тобто стався поділ часу та решти координат. Оскільки при цьому енергія зберігається і $H=E$, то дію можна представити у вигляді

$$S(q_i,t)=-Et+S_0(q_i), \tag{11.12}$$

де $S_0(q_i)$– так звана *укорочена дія* (про яку ми поговоримо далі), яка задовольняє рівнянню

$$H\left(q_1,q_2,...,q_s,\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\frac{\partial S_0}{\partial q_2},...,\frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=E\,. \tag{11.13}$$

Таким чином, ми отримали рівняння, що містить на одну динамічну змінну менше, але при цьому містить один довільний параметр (E).

Розглянемо можливість такої процедури у загальному випадку. Подамо рівняння Гамільтона-Якобі у вигляді

$$\Psi\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \qquad (11.14)$$

і уявімо, що в цьому рівнянні одна з координат (наприклад, q_1) разом із похідною від дії по ній $\partial S / \partial q_1$ відокремлюються, тобто входять до рівняння єдиним блоком:

$$\Psi\left(t, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; \phi_1\left(q_1, \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right)\right) = 0. \qquad (2\ 4\ .15)$$

Шукатимемо розв’язок цього рівняння у вигляді

$$S = S_1(q_1) + S'(q_i, t),\ i \neq 1. \qquad (11.16)$$

Після підстановки S в какому вигляді в (11.15) отримуємо

$$\Psi\left(t, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial t}, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \phi_1\left(q_1, \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right)\right) = 0. \qquad (11.17)$$

Якщо q_1– циклічна змінна, тобто не входить явно в гамільтоніан, а, отже, і в Ψ та ϕ_1, то з рівняння Гамільтона $\partial H / \partial q_1 = -\dot{p}_1$ витікає збереження імпульсу. При цьому із співвідношення $\partial S / \partial q_1 = p_1$ випливає, що $\phi_1 = \phi_1(p_1) = const$. Таким чином, у окремому випадкуї циклічної змінної q_1 дія зведеться до вигляду

$$S = p_1 q_1 + S'(q_i, t, p_1). \qquad (11.18)$$

Ця формула аналогічна формулі (11.12) для випадку консервативної системи, коли час грає роль циклічної змінної. Роль пари $p-q$ грає тепер пара $E-t$.

Розглянемо загальніший випадок, коли q_1 не є циклічною змінною, але ϕ_1 залишається константою. При цьому ми задовольнимо рівнянню (11.17), але воно зведеться до двох рівнянь:

$$\Psi\left(t, q_2, ..., q_s, \frac{\partial S'}{\partial t}, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \alpha_1\right) = 0, \tag{11.19}$$

$$\phi_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1. \tag{11.20}$$

Якщо нам вдасться з рівняння (11.20) виділити похідну $\partial S_1 / \partial q_1$ як функцію q_1: $\partial S_1 / \partial q_1 = A(q_1, \alpha_1)$, то ми знайдемо S_1 у квадратурах: $S_1 = \int A(q_1, \alpha_1) dq_1$.

Якщо вдасться так само відокремити й інші пари q_i, $\partial S_i / \partial q_i$, то після прирівнювання цих комбінацій константам для всіх $i = 1, ..., s$ ми отримаємо s незалежних рівнянь

$$\phi_i\left(q_i, \partial S_i / \partial q_i, \alpha_p\right) = \alpha_i, \tag{11.21}$$

в які на кожному $i-$тому етапі відділення в функцію ϕ_i, що виникає, потраплять, взагалі кажучи, константи α_p, що виникли на попередніх кроках. Після розв'язання у квадратурах цих s рівнянь отримуємо вираз для дії у вигляді

$$S(q_n, t) = \sum_{n=1}^{s} S_n(q_n; \alpha_1, ..., \alpha_s) + S_*(t; \alpha_1, ..., \alpha_s), \tag{11.22}$$

де функція $S_*(t; \alpha_1, ..., \alpha_s)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial S_*}{\partial t} + H(t; \alpha_1, ..., \alpha_s) = 0. \tag{2 4 .23}$$

У окремому випадку консервативної системи дія набуває вигляду

$$S(q_n, t) = \sum_{n=1}^{s} S_n(q_n; \alpha_1, ..., \alpha_s) - E(\alpha_1, ..., \alpha_s) t, \tag{11.24}$$

де кожній циклічній координаті q_c відповідає доданок $p_c q_c$.

Наприклад, розглянемо тривіальний випадок тривимірного осцилятора: частинки на полі $U(x, y, z) = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)/2$. Рівняння Гамільтона-Якобі у цьому випадку має вигляд

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{k}{2}x^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{k}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\frac{k}{2}z^2\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_x(x)}{\partial x}\right)^2+\frac{k}{2}x^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_y(y)}{\partial y}\right)^2+\frac{k}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_z(z)}{\partial z}\right)^2+\frac{k}{2}z^2\right)=E, \tag{11.25}$$

де $S(x,y,z)=S_x(x)+S_y(y)+S_z(z)$. Суть методу поділу змінних полягає в тому, що ми розглядатимемо лише рішення, для яких всі блоки цього рівняння, що залежать тільки від своїх координат (три дужки в (11.25)), рівні константам. Три константи $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$ пов'язані співвідношенням $E=\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z$. Враховуючи результати прикладу з початку лекції, випишемо результат для дії:

$$S(x,y,z,t)=\sum_{n=1,2,3}\left(\frac{\sqrt{U_n(x_n)(\alpha_n-U_n)}}{\omega_0}+\frac{\alpha_n}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U_n}{\alpha_n}}\right)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t \tag{11.26}$$

з $x_n=x,y,z$ та $U_n(x_n)=kx_n^2/2$. Диференціюючи цей вираз за константами α_n і прирівнюючи результати постійним β_n, отримуємо розв'язання задачі, яку можна було вирішити і простіше. Але розглянемо складніший приклад.

Продемонструємо «роботу» методу поділу змінних на задачах, які вирішуються у сферичних координатах (r,ϑ,ϕ). В таких координатах для частинкики у полі потенціалу $U(r,\vartheta,\phi)$ гамільтоніан має вигляд

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\vartheta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right)+U(r,\vartheta,\phi), \tag{11.27}$$

а відповідне рівняння Гамільтона-Якобі – вид

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right)+U(r,\vartheta,\phi)=E\,. \tag{11.28}$$

З (11.28) видно, що змінна ϕ відокремиться, якщо потенціал матиме доданок $U = U_1(r,\vartheta) + c(\phi)/r^2 \sin^2\vartheta$. При цьому рівняння (24.28) для $S = S_\phi + S_{r\vartheta}$ перетворюється на вигляд

$$\left[\left(\frac{dS_\phi}{d\phi}\right)^2 + 2mc(\phi)\right] = \left[2m\big(E - U_1(r,\vartheta)\big) - \left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial \vartheta}\right)^2\right] r^2 \sin^2\vartheta = \alpha_\phi, \tag{2 4.29 }$$

який можна переписати так

$$\left[\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\vartheta} + 2mU_1(r,\vartheta)r^2\right] = 2mr^2E - r^2\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial r}\right)^2. \tag{11.30}$$

З цього запису видно, що рівняння розділиться у випадку потенціалів виду $U_{r\vartheta} = b(\vartheta)/r^2 + a(r)$, котрим можна задовольнити виразом для $S_{r\vartheta}$ у вигляді $S_{r\vartheta} = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta)$:

$$\left[\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\vartheta} + 2mb(\vartheta)\right] = -2mr^2\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + a(r) - E\right). \tag{11.31}$$

Отже, у сферичних координатах можна знайти у квадратурах рішення для потенціалів досить загального типу (11.10), дія для яких має вигляд $S = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\phi(\phi) - Et$, де S_i задовольняють трьом *звичайним диференціальним рівнянням* :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\alpha_\vartheta}{2mr^2} - E = 0, \tag{11.32}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + b(\vartheta) + \frac{\alpha_\phi}{2m\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha_\vartheta}{2m} = 0, \tag{11.33}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_\phi}{d\phi}\right)^2 + c(\phi) - \frac{\alpha_\phi}{2m} = 0. \tag{11.34}$$

Ці рівняння мають однакову структуру: $dS_r/dr = F_r(r,E,\alpha_\vartheta)$, $dS_\vartheta/d\vartheta = F_\vartheta(\vartheta,\alpha_\phi,\alpha_\vartheta)$ і $dS_\phi/d\phi = F_\phi(\phi,\alpha_\phi)$, містять три константи α_ϕ, α_ϑ і E, і вирішуються в квдратурах :

$$S = -Et + \int d\phi \sqrt{\alpha_\phi - 2mc(\phi)} + \int d\vartheta \sqrt{\alpha_\vartheta - 2mb(\vartheta) - \alpha_\phi / \sin^2 \vartheta} + \int dr \sqrt{2m\left(E - a(r)\right) - \alpha_\vartheta /}$$

.

(11.35)

Диференціювання цього *повного рішення для* S за параметрами α_ϕ, α_ϑ і E дає розв'язання задачі. Якщо потенціал не залежить від змінної ϕ, тобто $c = 0$, то з (25.34) випливає, що $\alpha_\phi = p_\phi^2 = M_z^2$.